数理解析研究所講究録 1393 巻 2004 年 23-32

ISOVARIANT MAPS BETWEEN REPRESENTATION SPACES II

大阪大学大学院理学研究科・長崎　生光 (Ikumitsu Nagasaki)
Department of Mathematics, Graduate School of Science
Osaka University

1. 序

K. Borsuk は [1] において，現代では Borsuk-Ulam の定理あるいは Borsuk の対心定理と呼ばれる結果を証明した．(Ulam はこの定理を予想したので Ulam の名も冠されている．) この定理は変換群論の立場からは次のように述べられる．

定理 1.1 (Borsuk-Ulam の定理). 位数 2 の巡回群 C_2 が球面 S^n, S^m に対心的に作用しているとする．このとき連続 C_2 同変写像 $f : S^n \to S^m$ が存在するならば，$n \leq m$ が成り立つ．

Borsuk-Ulam の定理は様々な形で定式化されその応用もあることから，多くの研究者によって，様々な方向に一般化されている．その詳細はここで述べないが，興味のある方は，[8], [9], [4] などを見られたい．

A. G. Wasserman [10] は上の C_2 同変写像 $f : S^n \to S^m$ が isovariant でもあることに注目し，Borsuk-Ulam の定理の別の形の一般化である Borsuk-Ulam 定理の isovariant 版を考察した．G 空間の間の G-isovariant 写像 $f : X \to Y$ とは，$G_x = G_{f(x)}$ $(\forall x \in X)$ が成り立つ G 同変写像のことである．G_x は x のアイソトロピー群を表す．Iso X で X のすべてのアイソトロピー群の集合をあらわす．以後，写像はすべて連続性を仮定する．Wasserman の結果の一つは，次のように述べられる．

2000 *Mathematics Subject Classification.* 57S17, 55M20.

Key words and phrases. Borsuk-Ulam theorem, isovariant map, representation space, obstruction theory, multidegree.

定理 1.2 (Isovariant Borsuk-Ulam 定理). G をコンパクト可解リー群とする. 表現空間の間の G-isovariant 写像 $f: V \to W$ が存在するならば, 不等式

$$\dim V - \dim V^G \leq \dim W - \dim W^G$$

が成り立つ.

上記の不等式が成り立つ群を *Isovariant Borsuk-Ulam* **性質** (略して IB 性質) をもつ群と呼ぶ. 上の定理は, コンパクト可解リー群は IB 性質をもつということを示している.

我々は, [6] において, Isovariant Borsuk-Ulam 定理の逆問題について考察し, いくつかの結果を報告したが, ここでは, それ以降に得られた結果について報告したい. G を有限可解群とし, V, W を G の直交表現空間とする. $f: V \to W$ は G-isovariant 写像とする. このとき, 明らかに $\mathrm{Iso}\, V \subset \mathrm{Iso}\, W$ が成り立つ. また, 任意の部分群の組 H, K $(H \triangleleft K)$ に対して, $f^H: V^H \to W^H$ は自然に K/H-isovariant 写像と見なすことができる (補題 2.1 参照). したがって, 定理 1.2 から, 次の不等式を得る.

$$(C_{V,W}): \quad \dim V^H - \dim V^K \leq \dim W^H - \dim W^K \ (\forall H \triangleleft \forall K).$$

Isovariant Borsuk-Ulam 定理の逆問題をここでは次のように定式化する.

問題. G は可解群とする. 表現 V, W が条件 $(C_{V,W})$ かつ $\mathrm{Iso}\, V \subset \mathrm{Iso}\, W$ をみたすならば, G-isovariant 写像 $f: V \to W$ は存在するか?

定義. 上の問題が肯定的な答をもつ群を**逆性質**をもつ群と呼ぶ.

この問題は完全には解決されていないが, [6] において, アーベル p 群および位数が $p^n q^m$ の巡回群 $C_{p^n q^m}$ は逆性質をもつことが示された. ただし, p, q は素数.

本論文の主結果は次である.

主定理. p, q, r は相異なる素数とする. 位数 pqr の巡回群 C_{pqr} は逆性質をもつ.

証明には [6] で用いた議論に加え, 同変障害理論およびその障害類の消滅を示すために必要な多重写像度に関する Hopf 型の結果が必要となる.

2. 準備

[6] で示した isovariant 写像について基本的な事実を述べておく.

補題 2.1. (1) G-isovariant 写像 $f : X \to Y$ の作用を部分群 H に制限して得られる写像 $\mathrm{Res}_H f$ は H-isovariant である.

(2) H は正規部分群とする. G-isovariant 写像 $f : X \to Y$ の H 不動点集合への制限写像 $f^H : X^H \to Y^H$ は G/H-isovariant である.

(3) H は正規部分群とし, $g : X^H \to Y^H$ が G/H-isovariant とする. 射影 $G \to G/H$ により X^H, Y^H を G 空間とみたとき, g は G-isovariant 写像である.

(4) $f : X_1 \to Y_1$ と $g : X_2 \to Y_2$ が G-isovariant ならば, $f \times g : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$, $f * g : X_1 * X_2 \to Y_1 * Y_2$ も G-isovariant である. ($*$ は結を表す.)

任意の G 表現 V に対して, V_G により V^G の直交補表現を表そう, つまり, $V = V_G \oplus V^G$ が成り立つ. また $S(V)$ で V の単位球面を表す.

補題 2.2 ([6]). V, W を G 表現とする. 次の命題は互いに同値である.

(1) G-isovariant 写像 $f : V \to W$ が存在する.
(2) G-isovariant 写像 $f : V_G \to W_G$ が存在する.
(3) G-isovariant 写像 $f : S(V) \to S(W)$ が存在する.
(4) G-isovariant 写像 $f : S(V_G) \to S(W_G)$ が存在する.

G は有限アーベル群とする. 表現論からよく知られた事実を述べておく. V は G 表現とし, $V \cong V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r$ を既約分解とする. G はアーベル群なので, 各 V_i は (実) 1 または 2 次元である. 任意の部分群 H に対して, $V(H) = \oplus_{i:\mathrm{Ker}\, V_i = H} V_i$ とおく. ここで $\mathrm{Ker}\, V_i$ は表現準同型 $\rho_{V_i} : G \to O(n)$ ($n = 1$ or 2) の核である. 核が自明のとき, その表現は忠実であるという. つぎのことはよく知られている.

補題 2.3. V は G の既約表現とする. $K = \mathrm{Ker}\, V$ とおく.

(1) G/K は巡回群である.

(2) V^K $(= V)$ は忠実な既約 G/K 表現である. 逆に U が忠実な既約 G/K 表現ならば, 射影 $G \to G/K$ を通して U は核 K をもつ既約 G 表現とみなされる. したがって, 核 K をもつ既約 G 表現と忠実な既約 G/K 表現の間に 1 対 1 対応がある.

位数 n の巡回群 C_n の既約表現について思い出しておこう. C_n の生成元を g とする. ユニタリー表現 $t_i (= \mathbb{C})$ が g の作用を $gz = \xi^i z$ ($z \in \mathbb{C}$) とすることにより定義される. ここで $\xi = \exp(2\pi\sqrt{-1}/n)$ である. この t_i ($0 \le i \le n-1$) が C_n のすべての (互いに異なる) 既約なユニタリー表現である. 基礎体を $\mathbb{R}$ に制限すると, 直

交表現が得られる.(ただし，既約になるとは限らない.) この直交表現を T_i で表すことにする. $1 \leq i \leq [(n-1)/2]$ ならば，T_i は直交表現としても既約であり互いに異なる. また直交表現として $T_i \cong T_{n-i}$ である. T_0, $T_{n/2}$ (後者は n が偶数の場合) は直交表現として既約ではない. 実際 $T_0 \cong 2\mathbb{R} := \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $T_{n/2} \cong 2\mathbb{R}^- := \mathbb{R}^- \oplus \mathbb{R}^-$ となってる. ここで $\mathbb{R}$ は自明な 1 次元表現，$\mathbb{R}^-$ は非自明な 1 次元表現をあらわす (i.e., g は $\mathbb{R}^-$ 上 $gx = -x$ で作用する). また，$\operatorname{Ker} T_i \cong C_{(i,n)}$ であることに注意しておこう. 特に T_i が忠実になるのは i と n が互いに素であることが必要十分である.

isovariant 写像の存在について，つぎのことは基本的である.

補題 2.4 ([6]). V と W は同じ核をもつ既約 G 表現とする. そのとき G-isovariant 写像 $f : V \to W$ が存在する.

G がアーベル群のとき，$\mathcal{D}$ を G/H が巡回群となる部分群 H 全体の集合とする. 補題 2.3 (1) より $V = \oplus_{H \in \mathcal{D}} V(H)$ となる. (ただし $V(H) = 0$ となることもありうる.)

以下いくつかの注意を述べておく. G は有限可解群とする. 次の条件を考える.

$(C'_{V,W})$: 任意の組 $H \lhd K$ で K/H は素数位数になるものについて,

$$\dim V^H - \dim W^H \leq \dim W^H - \dim W^H$$

が成り立つ.

命題 2.5. G を有限可解群とする. 条件 $(C_{V,W})$ と $(C'_{V,W})$ は同値である. さらに，G がベキ零で 条件 $(C_{V,W})$ がみたされているとき, 任意の組 $H < K$ について

$$\dim V^H - \dim V^K \leq \dim W^H - \dim W^K$$

が成り立つ.

証明. $(C_{V,W})$ ならば $(C'_{V,W})$ であることは明らかである. 任意の組 $H \lhd K$ に対して， K/H は可解なので, 部分群 H_i, $i = 0, \ldots, r$, が存在して

$$H = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_r = K$$

H_i/H_{i-1} は素数位数となる．$(C'_{V,W})$ により，

$$\begin{aligned}\dim V^H - \dim V^K &= \sum_{i=1}^{r}(\dim V^{H_{i-1}} - \dim V^{H_i})\\ &\le \sum_{i=1}^{r}(\dim W^{H_{i-1}} - \dim W^{H_i})\\ &\le \dim W^H - \dim W^K.\end{aligned}$$

したがって $(C'_{V,W})$ ならば $(C_{V,W})$ が成り立つ．

G がベキ零のとき, 真部分群 H の正規化群について $N_G(H) > H$ が成り立つ．この事実を繰り返し用いると部分群 H_i, $i = 1, \ldots, r$, が存在して

$$H = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_r = K.$$

となる．上と同じ議論により，

$$\dim V^H - \dim V^K \le \dim W^H - \dim W^K$$

を得る．

命題 2.6. G はベキ零とする．G 表現の組 V, W が $(C_{V,W})$ をみたすならば $\mathrm{Iso}\, V \subset \mathrm{Iso}\, W$ が成り立つ．

証明. 次の事実を思い出そう．

- G 表現 U について, $H \in \mathrm{Iso}\, U$ であるためのの必要十分条件は，$H < K$ となる任意の部分群 K に対して，$\dim U^H > \dim U^K$ をみたすことである．

$H < K$ とする．部分群 H_i, $i = 0, \ldots, r$, が存在して，

$$H = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_r = K$$

をみたす．命題 2.5 より

$$\dim V^H - \dim V^K \le \dim W^H - \dim W^K$$

となる．$H \in \mathrm{Iso}\, V$ ならば $\dim V^H - \dim V^K > 0$ であり，したがって $\dim W^H - \dim W^K > 0$ となる．ゆえに $H \in \mathrm{Iso}\, W$.

この命題により G がベキ零，特に，アーベル群のときには，問題の条件として $\mathrm{Iso}\, V \subset \mathrm{Iso}\, W$ を落とすことができる．

3. 同変障害理論と多重写像度

はじめに同変障害理論について必要な事実を思い出しておこう．詳しくは[3]を参照されたい．Gはコンパクト・リー群とする．(X, A)をG-CW複体対とし，Gは$X \backslash A$上に自由に作用しているとする． X_nで(X, A)のn-スケルトンを表す． $C_*(X, A)$ $(= H_*(X_*, X_{*-1}; \mathbb{Z}))$を胞体チェイン複体とすると，$C_*(X, A)$に$G$作用が誘導される．このとき，単位連結成分$G_0$の作用は自明であるから$C_*(X, A)$は$\mathbb{Z}(G/G_0)$加群の構造をもつ．$\mathbb{Z}(G/G_0)$加群$\pi$を係数とするコチェイン複体$C_G^*(X, A; \pi)$を

$$C_G^*(X, A; \pi) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}(G/G_0)}(C_*(X, A), \pi)$$

で定義する．このコホモロジー群を$\mathfrak{H}_G^*(X, A; \pi)$で表す．[3, p.112]より同型

$$\mathfrak{H}_G^*(X, A; \pi) \cong H^*(X/G, A/G; \pi)$$

が存在する．(ここで$H^*(X/G, A/G; \pi)$は局所系を係数とするコホモロジーである．)
Yを弧状連結でn単純な, $n \geq 1$, G空間とする．ホモトピー群$\pi_n(Y)$ $(= [S^n, Y])$は$\mathbb{Z}(G/G_0)$加群の構造をもつ． 同変障害理論の主定理を述べておく．

定理 3.1. 上の状況において

(1) G写像$f : A \to Y$をG写像$F : X \to Y$に拡張できるための必要十分条件は障害類$\gamma_G(f) \in \mathfrak{H}_G^*(X, A; \pi_{*-1}(Y))$が消えることである．

(2) 2つのfの拡張FとF'がGホモトピックであるための必要十分条件は障害類$\gamma_G(F, F') \in \mathfrak{H}_G^*(X, A; \pi_*(Y))$が消えることである．

障害類を計算することは一般の状況では困難であるが，あるよい状況では多重写像度を用いて障害類が計算できる．ここでは一例として，$G = S^1$, $V = T_p \oplus T_q \oplus T_r$, $W = T_1 \oplus T_{pq} \oplus T_{qr} \oplus T_{rp}$の場合で考察する．ここで$p$, q, rは素数で，T_iはKernelがC_iの既約S^1表現である．

Remark. 2次元既約C_n表現は既約S^1表現の制限となっている．

つぎの結果は[6]で提出された問題に肯定的解答を与える．

命題 3.2. 上の状況の下，S^1-isovariant写像$f : V \to W$が存在する．

証明. $G = S^1$とする．補題2.2よりS^1-isovariant写像$f : S(V) \to S(W)$の存在を示せばよい．$S(V)$の特異集合$S(V)^{>1} := \cup_{H \neq 1} S(V)^H$は3つの円周$S(T_p)$, $S(T_q)$, $S(T_r)$からなり， これらは[2]の意味での例外軌道である．つまりS^1/C_p, S^1/C_q,

S^1/C_r にそれぞれ同型である． N_i, $i = p$, q or r, を $S(T_i)$ の $S(V)$ における不変閉近傍とする．スライス定理により N_i は $S^1 \times_{C_i} D(T_j \oplus T_k)$, $\{i,j,k\} = \{p,q,r\}$, に G 微分同相である．ここで $D(U)$ は U の単位球体を表す．同様に S^1/C_i に同型な軌道の $S(W)$ における不変閉近傍 $A_i \cong S^1 \times_{C_i} D(W_i)$ をとる．そのとき S^1-isovariant 写像 $\tilde{g}_i : N_i \to A_i$ が存在する．実際 C_i は $S(T_j \oplus T_k)$ および $S(W_i) \setminus S(W_i)^{>1}$ 上に自由に作用し，

$$\dim S(T_j \oplus T_k) = 3 \leq \dim S(W_i) - \dim S(W_i)^{>1} = 4$$

であるから，C_i-isovariant 写像 $\bar{g}_i : S(T_j \oplus T_k) \to S(W_i)$ が存在する．この写像の開錐をとることにより C_i-isovariant 写像 $g_i : D(T_j \oplus T_k) \to D(W_i)$ を得る．したがって S^1-isovariant 写像 $\tilde{g}_i = S^1 \times_{C_i} g_i : N_i \to A_i$ を得る．

次に $Y = S(W) \setminus S(W)^{>1}$, $X = S(V) \setminus \mathrm{Int}\,(N_p \coprod N_q \coprod N_r)$ とおく． S^1 は X と Y へ自由に作用していることから X から Y への S^1 写像で

$$f = \coprod f_i := \coprod g_i|_{\partial N_i} : \partial(N_p \coprod N_q \coprod N_r) \to \coprod_i A_i \subset Y$$

を拡張しているものの存在を言えばよい．$\dim X/S^1 = 4$ であり，Y は 2 連結，$\pi_3(Y) \cong H_3(Y) \cong \mathbb{Z}^3$ であることに注意しよう． このとき f が拡張できるための障害は $\mathfrak{H}^4_{S^1}(X, \partial X; \pi_3(Y)) \cong H^4(X/S^1, \partial X/S^1; \pi_3(Y)) \cong \pi_3(Y)$ にある．[7] においてこのようにして定まる障害を多重写像度を用いて計算した．その結果を述べておく．まず S^1-map $h_i : \partial N_i \to Y$ の多重写像度は

$$\text{m-Deg}\, h_i = \bar{h}_{i*}([S(T_j \oplus T_k)]) \in H^3(Y) = \mathbb{Z}^3,$$

として定義される．ここで $\bar{h}$ は C_i-map $h|_{S(T_j \oplus T_k)} : S(T_j \oplus T_k) \to Y$ であり，$[S(T_j \oplus T_k)]$ は $S(T_j \oplus T_k)$ の基本類を表す．また $H^3(Y)$ は包含写像から誘導される同型

$$H_3(Y) \to \oplus_i H_3(SW \setminus S(T_i)) \leftarrow \oplus_i H_3(S(T_j \oplus T_k)) = \mathbb{Z}^3$$

によって $\mathbb{Z}^3$ と同一視する．

任意の S^1-map $h : \partial N_i \to Y$ に対し，$d_{Ci}(h) \in \mathbb{Z} = H_3(S(T_j \oplus T_k))$ を m-Deg h の i-成分とする，$i = p$, q, r. （h の拡張と限らなければ）S^1-map $F_0 : X \to Y$ は常に存在することに注意しておく．なぜならこの場合の障害群 $\mathfrak{H}^*_{S^1}(X, \pi_{*-1}(Y)) \cong H^*(X/S^1; \pi_{*-1}(Y))$ は消えるからである．このような G 写像 F_0 を 1 つ固定し，$f_{0,i} =$

$F_0|_{\partial N_i}$ とおく．$f_i = g_i|_{\partial N_i} : N_i \to Y$ を上のような S^1-isovariant 写像とする． このとき次の Hopf 型定理が成り立つ．

定理 3.3 ([7]). $i, j \in \{p, q, r\}$ とする．

(1) $d_{C_i}(f_j) = 0$ for $i \neq j$.

(2) $\text{m-Deg}\, f_i - \text{m-Deg}\, f_{0,i} \in i\mathbb{Z}^3$.

(3) 任意の $a \in i\mathbb{Z}^3$, $i = p, q, r$ に対して, S^1-isovariant 写像 $g_i' : N_i \to SW$ が存在して, $\text{m-Deg}\, g_i'|_{\partial N_i} = \text{m-Deg}\, f_i + a$ をみたす．

(4) 障害群 $\mathfrak{H}^4_{S^1}(X, \partial X; \pi_3(Y))$ の $\mathbb{Z}^3$ との同一視の下，拡張に対する障害類 $\gamma_{S^1}(f)$ は

$$\gamma_{S^1}(f) = \sum_{i=p,q,r} (\text{m-Deg}\, f_i - \text{m-Deg}\, f_{0,i})/i$$

と記述される．

上の事実を用いると適当な S^1-isovariant 写像 $g_i : N_i \to S(W)$ で $\gamma_{S^1}(f) = 0$ となるものがとれる．したがって f を拡張する S^1 写像 $F : X \to Y$ が存在する． 写像を張り合わせて S^1-isovariant 写像 $F \cup \coprod_i g_i : S(V) \to S(W)$ を得る．

4. 主定理の証明

$G = C_{pqr}$ とする．[6] の議論により，条件 $(C_{V,W})$ をみたす G 表現 V, W は，次の (1)–(4) をみたす場合に帰着される．

(1) V, W は忠実である．

(2) V, W は 1 次元の既約表現を含まない，したがって V, W に含まれる既約表現は T_i の形のみ．

(3) 任意の $H < G$ に対して，(a) $V(H) = 0$, $W(H) \neq 0$, (b) $V(H) \neq 0$, $W(H) = 0$ または (c) $V(H) = 0$, $W(H) = 0$.

(a) をみたす部分群の集合を $\mathcal{E}_+$, (b) をみたす部分群の集合を $\mathcal{E}_-$ と表す．(2) より $V(G) = W(G) = 0$ である．(1) より $1 \in \operatorname{Iso} S(V) \subset \operatorname{Iso} S(W)$ となる．$(C_{V,W})$ より，G の極大部分群 C_{pq}, C_{qr}, C_{pr} について，(b) は起こらない．したがってこれらは $\mathcal{E}_-$ に属することはない．これらのことと p, q, r の対称性に注意すると，$\mathcal{E}_-$ として以下の場合に調べればよいことがわかる．

(1) $\mathcal{E}_- = \{1\}$.

(2) $\mathcal{E}_- = \{1, C_p\}$.

(3) $\mathcal{E}_- = \{C_p, C_q\}$.

(4) $\mathcal{E}_- = \{1, C_p, C_q\}$.

(5) $\mathcal{E}_- = \{C_p, C_q, C_r\}$.

(6) $\mathcal{E}_- = \{1, C_p, C_q, C_r\}$.

(1) の場合：G は $S(V)$ に自由に作用している．($C_{V,W}$) より，任意の部分群 $H \neq 1$ に対して

$$\dim S(V) + 1 \leq \dim S(W) - \dim S(W)^H$$

が成り立つ．したがって

$$\dim S(V) + 1 \leq \dim S(W) - \dim S(W)^{>1}$$

である．$k = \dim S(W) - \dim S(W)^{>1}$ とおき，$Y = S(W) \setminus S(W)^{>1}$ とおく．Y は $(k-2)$ 連結であることに注意する．このとき G 写像 $f : S(V) \to Y$ が存在するための障害は $\mathfrak{H}^*_G(S(V); \pi_{*-1}(Y)) \cong H^*(S(V)/G; \pi_{*-1}(Y))$ にある．ところが上の次元に関する不等式からこのコホモロジー群は消える．したがって，G 写像 $f : S(V) \to Y$ が存在する．包含写像 $Y \subset S(W)$ と合成して G-isovariant 写像を得る．

(2), (3), (4), (6) の場合は，[6] と同様の議論で isovariant 写像の存在が示せるので詳細は省略する．

(5) の場合：$\mathrm{Iso}\, V \subset \mathrm{Iso}\, W$ に注意すれば，$\mathcal{E}_+$ として次の 2 つの可能性しかない．

(i) $\mathcal{E}_+ = \{C_{pq}, C_{qr}, C_{rp}\}$.

(ii) $\mathcal{E}_+ = \{1, C_{pq}, C_{qr}, C_{rp}\}$.

(i) の場合：$C_p < C_{pq}$, $C_p < C_{pr}$ について ($C_{V,W}$) を適用して $\dim V(C_p) \leq \dim W(C_{pr})$, $\dim V(C_p) \leq \dim W(C_{pq})$ を得る．T_p から $T_{pq} \oplus T_{pr}$ への isovariant 写像が存在する（[6]）ので isovariant 写像 $h : V(C_p) \to W'(C_{pq}) \oplus W'(C_{pr})$ が存在する．ここで $W'(C_{pq})$, $W'(C_{pr})$ は $W'(C_{pq}) \subset W(C_{pq})$, $W'(C_{pr}) \subset W(C_{pr})$, $\dim W'(C_{pq}) = \dim W'(C_{pr}) = \dim V(C_p)$ となる部分表現．$\overline{V} = V - V(C_p)$, $\overline{W} - W'(C_{pq}) \oplus W'(C_{pr})$ とおく．このとき容易に $\overline{V}$, $\overline{W}$ は ($C_{\overline{V},\overline{W}}$) をみたすことがわかる．したがって問題は $\mathcal{E}_- = \{C_q, C_r\}$ の場合に帰着され，isovariant 写像の存在が示される．

(ii) の場合：命題 3.2 の S^1-isovariant 写像を $G = C_{pqr}$ に制限することにより G-isovariant 写像

$$h : T_p \oplus T_q \oplus T_r \to T_1 \oplus T_{pq} \oplus T_{qr} \oplus T_{pr}$$

が得られる．$\overline{V} = V - T_p \oplus T_q \oplus T_r$, $\overline{W} = W - T_1 \oplus T_{pq} \oplus T_{qr} \oplus T_{pr}$ とおくと条件 $(C_{\overline{V},\overline{W}})$ をみたすことは容易に確かめられる．この操作を続けていくと，(i) の場合か，あるいは，$\mathcal{E}_- = \{C_p, C_q\}$ の場合に帰着され，isovariant 写像の存在が示される．以上により定理の証明が終わる．

REFERENCES

[1] K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale Sphäre*, Fund. Math, **20** (1933), 177–190.
[2] G. E. Bredon, Introduction to compact transformation groups,
[3] T. tom Dieck, Transformation groups, Walte de Gruyter, Berlin, New York 1987.
[4] J. Matoušek, *Using the Borsuk-Ulam theorem. Lectures on topological methods in combinatorics and geometry*, Universitext, Springer, 2003.
[5] I. Nagasaki, *The weak isovariant Borsuk-Ulam theorem for compact Lie groups*, Arch. Math. **81** (2003), 348-359.
[6] I. Nagasaki, *Isovariant maps between representatin spaces*, 数理解析研究所講究録 **1290** (2002), 83-94.
[7] I. Nagasaki, *Isovariant Borsuk-Ulam results for pseudofree circle actions and their converse*, to appear.
[8] H. Steinlein, *Borsuk's antipodal theorem and its generalizations and applications: a survey*, Topological methods in nonlinear analysis, 166–235, Montreal, 1985.
[9] H. Steinlein, *Spheres and symmetry: Borsuk's antipodal theorem*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **1** (1993), 15–33.
[10] A. G. Wasserman, *Isovariant maps and the Borsuk-Ulam theorem*, Topology Appl. **38** (1991), 155--161.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, OSAKA UNIVERSITY, TOYONAKA 560-0043, OSAKA, JAPAN

E-mail address: nagasaki@math.sci.osaka-u.ac.jp